Kombinatorika. Varbūtību teorijas elementi.

Aivars Ančupāns, Āgenskalna Valsts ģimnāzijas skolotājs, dabas zinātņu maģistrs matemātikā

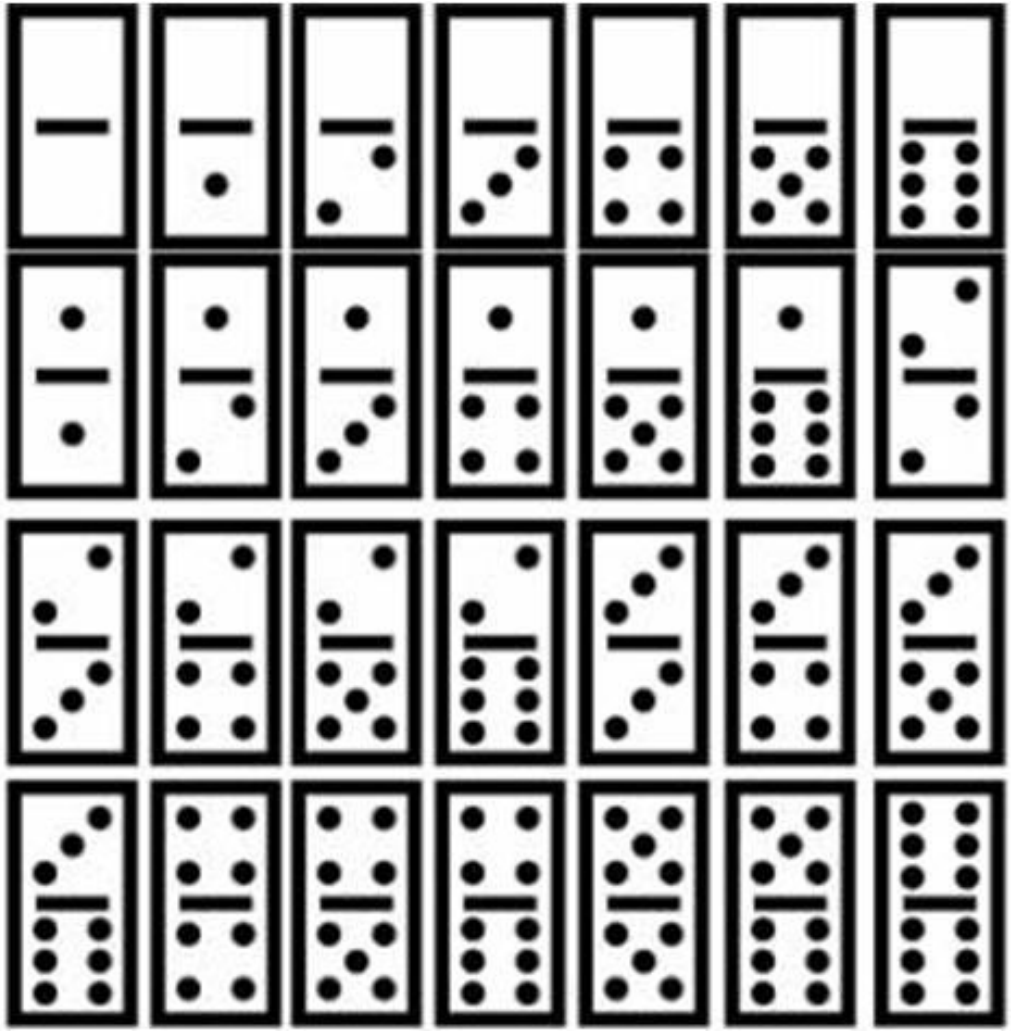
Meistarklases nosaukums
Kombinatorika. Varbūtību teorijas elementi

Mērķauditorija
Matemātikas skolotāji (7. klase -12. klase) .

Sagatavoja
Āgenskalna Valsts ģimnāzijas matemātikas skolotājs Aivars Ančupāns

Anotācija:
Kombinatorikas un varbūtību teorijas uzdevumu risināšana bieži ir saistīta ar daudzām grūtībām, kas rodas galvenokārt tāpēc, ka skolēni pietiekami labi neizprot teorētisko vielu. Šīs meistarklases mācību mērķis ir parādīt, ka lietot teorētiskās zināšanas uzdevumu risināšanā; ir apskatīti dažādi uzdevumu risināšanas paņēmieni un metodes.

Kombinatorika.



Cik dažādos veidos var izmaksāt vienu eiro,
izmantojot 10, 20 un 50 centu monētās?

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var
sadalīt nogriežņos ar garumu 1 cm, 2 cm un 3 cm?

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var sadalīt
trīs nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 50 cm var sadalīt
trīs nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

Atrisināt vienādojumu $x + y + z = 100$
naturālos skaitļos.

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var sadalīt
nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

Cik ir “laimīgo” 4-ciparu biļešu, kuru numuru pirmo divu ciparu summa un pēdējo divu ciparu summa ir vienāda ar 7?

Cik ir “laimīgo” 6-ciparu biļešu, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa un pēdējo trīs ciparu summa ir vienāda ar 12?

Cik ir “laimīgo” 4-ciparu biļešu, t.i., kuru numuru pirmo divu ciparu summa vienāda ar pēdējo divu ciparu summu?

Cik ir dažādu trijstūru, kuru malu garumi ir naturāli skaitļi, bet perimetrs ir 30 cm.

Cik ir dažādu šaurleņķu trijstūru, kuru malu garumi ir naturāli skaitļi, bet perimetrs ir 30 cm.

Cik dažādos veidos naturālus skaitļus no1 līdz 9 ieskaitot var sadalīt grupās tā, lai visās grupās skaitļu summas būtu vienādas?

Cik dažādos veidos var izmaksāt vienu eiro, izmantojot 10, 20 un 50 centu monētās?

100 = 50 + 50
100 = 50 + 20 + 20 + 10
100 = 50 + 20 + 10 + 10 + 10
100 = 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
100 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20
100 = 20 + 20 + 20 + 20 + 10 + 10
100 = 20 + 20 + 20 + 10 + 10 + 10 + 10
100 = 20 + 20 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
100 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 +10

Atbilde: desmit

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var sadalīt nogriežņos ar garumu 1 cm, 2 cm un 3 cm?

1) $8=3+3+2=3+2+3=2+3+3$

vai $\boxed{3}$ kopā: 3

"2" atrašanas vietas izvēle

2) $8=3+3+1+1=\ldots$

$C_4^2=6$ (divu "1" atrašanas vietu izvēle)

kopā: 6

3) $8=3+2+2+1=\ldots$

$\boxed{4}\boxed{3}=4\cdot 3=12$ kopā: 12

"3" vietas izvēle "1" vietas izvēle

4) $8=3+2+1+1+1=\ldots$

$\boxed{5}\boxed{4}=5\cdot 4=20$ kopā: 20

"3" vietas izvēle "2" vietas izvēle

5) $8=3+1+1+1+1+1=\ldots$

$\boxed{6}$ ← "3" vietas izvēle kopā: 6

6) $8=2+2+2+2$ kopā: 1

7) $8=2+2+2+1+1=\ldots$

$C_5^2=10$ (divu "1" atrašanas vietu izvēle) kopā: 10

8) $8=2+2+1+1+1+1=\ldots$

$C_6^2=15$ (divu "2" atrašanas vietu izvēle) kopā: 15

9) $8=2+1+1+1+1+1+1=\ldots$

$\boxed{7}$ ← "2" vietas izvēle kopā: 7

10) $8=1+1+1+1+1+1+1+1$ kopā: 1

Atbilde: $3+6+12+20+6+1+10+15+7+1=$
$=81$

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var sadalīt trīs nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

I

1) $8 = 6 + 1 + 1 = \ldots$

$\boxed{3}$ ← "6" vietas izvēle

2) $8 = 5 + 2 + 1 = \ldots$

$P_3 = 3! = 6$

3) $8 = 4 + 3 + 1 = \ldots$

$P_3 = 3! = 6$

4) $8 = 4 + 2 + 2 = \ldots$

$\boxed{3}$ ← "4" vietas izvēle

5) $8 = 3 + 3 + 2$

$\boxed{3}$ ← "2" vietas izvēle

Kopā $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = \underline{\underline{21}}$

II

$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Vajag sadalīt trijos saskaitāmos

⇒ vajag izvēleties divas "+" zīmes.

Secība nav svarīga. Tātad $C_7^2 = \underline{\underline{21}}$.

<u>Piemērs</u> $8 = 3 + 1 + 4$

$8 = (1+1+1) + 1 + (1+1+1+1)$

divu "+" izvēle

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 50 cm var sadalīt trīs nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

I

$50 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$. Kopā ir 49 "+" zīmes.

Vajag izvēlēties 2 "+" zīmes.

Secība nav svarīga. Tātad $C_{49}^{2} = \underline{\underline{1176}}$

II

$50 = a + b + c$

$a = 1; 2; 3; \ldots; 48$

$a = 1 \Rightarrow b = 1; 2; 3; \ldots; 48$; c ir atlikums

kopā 48 veidi

$a = 2 \Rightarrow b = 1; 2; 3; \ldots; 47$; c ir atlikums

kopā 47 veidi

...

$a = 27 \Rightarrow b = 1; 2; 3; \ldots; 22$; c ir atlikums

kopā 22 veidi

...

$a = 48 \Rightarrow b = 1$; $c = 1$

1 veids

Atbilde: $48 + 47 + 46 + \ldots + 1 = \underline{\underline{1176}}$

Cik atrisinājumu naturālos skaitļos ir vienādojumam x + y + z = 100 ?

$100 = 1 + 1 + \ldots + 1$ (I)

$C_{99}^{2} = 4851$

vai (II)

$100 = x + y + z$

$x = 1 \Rightarrow y = 1; 2; \ldots; 98;$ z-atlikums

$x = 2 \Rightarrow y = 1; 2; \ldots; 97;$ z-atlikums

...

$x = 97 \Rightarrow y = 1; 2;$ z-atlikums

$x = 98 \Rightarrow y = 1; z = 1$

Kopā ir $98 + 97 + \ldots + 2 + 1 = 4851$

Cik dažādos veidos nogriezni ar garumu 8 cm var sadalīt nogriežņos, kuru garumi ir naturāli skaitļi?

$8 = 1+1+1+1+1+1+1+1$

1) $8 = x_1 + x_2$

vajag izvēlēties vienu "+" zīmi.

$\Rightarrow C_7^1 = 7$

2) $8 = x_1 + x_2 + x_3$

vajag izvēlēties divas "+" zīmes.

$\Rightarrow C_7^2 = 21$

...

7) $8 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8$

vajag izvēlēties septiņas "+"

$\Rightarrow C_7^7 = 1$

Kopā $C_7^1 + C_7^2 + \ldots + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 128 - 1 =$

$= \underline{\underline{127}}$

Cik ir “laimīgo” 4-ciparu biļešu, kuru numuru pirmo divu ciparu summa un pēdējo divu ciparu summa ir vienāda ar 7?

$$7 = x + y \; ; \; x, y \in \{0; 1; 2; \dots; 7\}$$

$$7 = 7+0 = 0+7 = 6+1 = 1+6 = 5+2 =$$

$$= 2+5 = 4+3 = 3+4 \Rightarrow 8 \text{ veidi}$$

$$\boxed{8} \text{ un } \boxed{8} = 8 \cdot 8 = 64$$

pirmo divu ciparu summa ir 7

pēdējo divu ciparu summa ir 7

$12 = x + y + z$

$x = 0 \Rightarrow y = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 7 veidi

$x = 1 \Rightarrow y = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 8 veidi

$x = 2 \Rightarrow y = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 9 veidi

$x = 3 \Rightarrow y = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 10 veidi

$x = 4 \Rightarrow y = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 9 veidi

...

$x = 8 \Rightarrow y = 0; 1; 2; 3; 4;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 5 veidi

$x = 9 \Rightarrow y = 0; 1; 2; 3;$ z-atlikums $\Rightarrow$ 4 veidi

Kopā $7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 73$

$\boxed{73}\boxed{73} = 73 \cdot 73 = 5329$

pirmo trīs ciparu summa ir 12

pēdējo trīs ciparu summa ir 12

Cik ir "laimīgo" 6-ciparu biļešu, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa un pēdējo trīs ciparu summa ir vienāda ar 12?

Apzīmēsim divu ciparu summu ar n.
a_n – tik dažādos veidos var uzrakstīt šo summu.
tad "laimīgo" biļešu skaits ir $a_n \cdot a_n$.

$n = 1; 2; 3; \dots; 18.$ $n = x + y$

$n = 1 \Rightarrow x = 0; 1;$ y-atlikums $\Rightarrow a_1 = 2.$

$n = 2 \Rightarrow x = 0; 1; 2;$ y-atlikums $\Rightarrow a_2 = 3$

...

$n = 9 \Rightarrow x = 0; 1; 2; \dots; 9;$ y-atlikums $\Rightarrow a_9 = 10$

$n = 10 \Rightarrow x = 1; 2; \dots; 9;$ y-atlikums $\Rightarrow a_{10} = 9$

$n = 11 \Rightarrow x = 2; 3; \dots; 9;$ y-atlikums $\Rightarrow a_{11} = 8$

...

$n = 17 \Rightarrow x = 8; 9;$ y-atlikums $\Rightarrow a_{17} = 2$

$n = 18 \Rightarrow x = 9;$ $y = 9 \Rightarrow a_{18} = 1$

"Laimīgo" biļešu skaits ir $(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_{18})^2 =$

$= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 +$

$+ 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 669$

Cik ir "laimīgo" 4-ciparu biļešu, t.i., kuru numuru pirmo divu ciparu summa vienāda ar pēdējo divu ciparu summu?

$30 = x + y + z$

Pieņemsim, ka x ir garākā trijstūra mala.

$x \geq \frac{1}{3} P = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$

$y + z > x \Rightarrow y + z > 30 - (y + z)$

$\Rightarrow 2(y + z) > 30 \Rightarrow y + z > 15$

$\Rightarrow x = 30 - (y + z) < 15.$

Tātad $x \in [10; 15)$

$x = 10 \Rightarrow 30 = 10 + 10 + 10$

$x = 11 \Rightarrow 30 = 11 + 11 + 8 = 11 + 10 + 9$

$x = 12 \Rightarrow 30 = 12 + 12 + 6 = 12 + 11 + 7 = 12 + 10 + 8 =$
$= 12 + 9 + 9$

$x = 13 \Rightarrow 30 = 13 + 13 + 4 = 13 + 12 + 5 = 13 + 11 + 6 =$
$= 13 + 10 + 7 = 13 + 9 + 8$

$x = 14 \Rightarrow 30 = 14 + 14 + 2 = 14 + 13 + 3 = 14 + 12 + 4 =$
$= 14 + 11 + 5 = 14 + 10 + 6 = 14 + 9 + 7 = 14 + 8 + 8$

Kopā 19 trijstūri

Cik ir dažādu trijstūru, kuru malu garumi ir naturāli skaitļi, bet perimetrs ir 30 cm.

X – garākā mala, α – lielākais leņķis

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos\alpha$$

Šaurleņķu trijstūris $\Rightarrow \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$$\Rightarrow x^2 < y^2 + z^2$$

10; 10; 10 – der ; 11; 11; 8 – der

11; 10; 9 – der ; 12; 12; 6 – der

12; 11; 7 – der ; 12; 10; 8 – der

12; 9; 9 – der ; 13; 13; 4 – der

13; 12; 5 – neder, jo $13^2 = 12^2 + 5^2$

13; 11; 6 – neder, jo $13^2 > 11^2 + 6^2$

13; 10; 7 – neder, jo $13^2 > 10^2 + 7^2$

13; 9; 8 – neder, jo $13^2 > 9^2 + 8^2$

14; 14; 2 – der ; 14; 13; 3 – neder, jo $14^2 > 13^2 + 3^2$

14; 12; 4 – neder, jo $14^2 > 12^2 + 4^2$

14; 11; 5 – neder ; 14; 10; 6 – neder

14; 9; 7 – neder ; 14; 8; 8 – neder

Kopā 9 šaurleņķu trijstūri

Cik ir dažādu šaurleņķu trijstūru, kuru malu garumi ir naturāli skaitļi, bet perimetrs ir 30 cm.

Cik dažādos veidos naturālus skaitļus no1 līdz 9 ieskaitot var sadalīt grupās tā, lai visās grupās skaitļu summas būtu vienādas?

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

45 daliņāji ir 1; 3; 5; 9; 15 un 45

1) 1; 9; 15 un 45 – tādu grupu skaits nav iespējams

2) grupu skaits ir 5.
katras grupas skaitļu summa ir 9

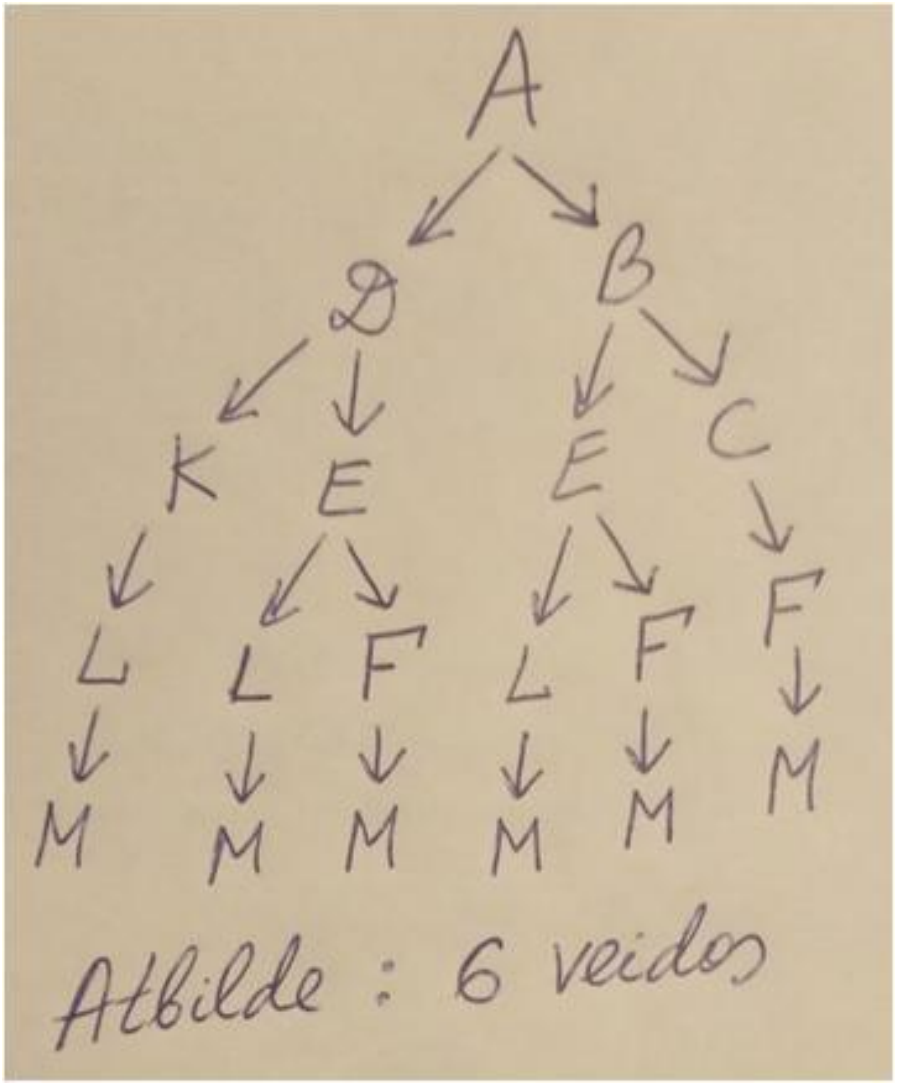
9 1;8 2;7 3;6 4;5

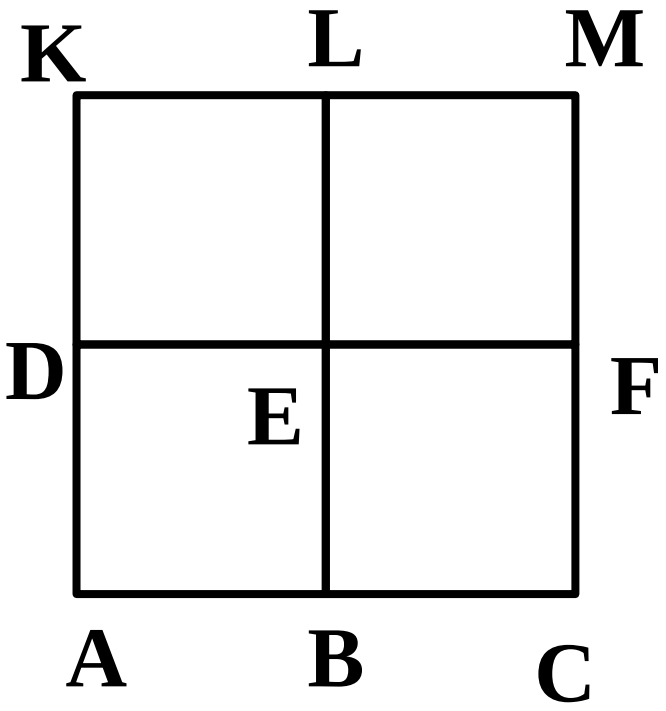
3) grupu skaits ir 3.
katras grupas skaitļu summa ir 15

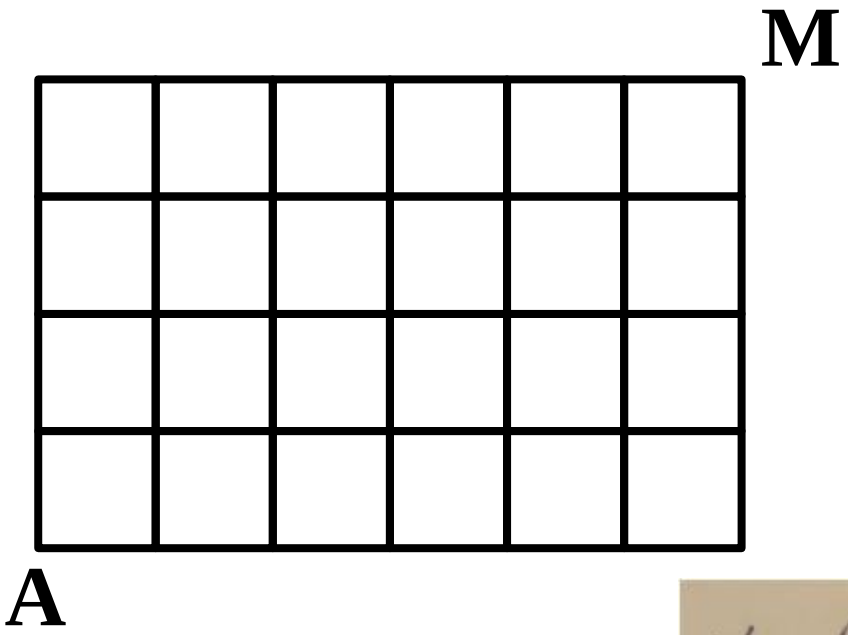
96; 87; 54321	96; 852; 7431
951; 87; 6432	96; 843; 7521
942; 87; 6531	96; 8421; 753
9321; 87; 654	951; 843; 762
	942; 861; 753

Atbilde: 10 veidos

Cik dažādos veidos no punkta A var nokļūt punktā M, ja drīkst pārvietoties uz augšu un pa labi?







Cik dažādos veidos no punkta A var nokļūt punktā M, ja drīkst pārvietoties uz augšu un pa labi?

Viegli pamanīt, ka jebkurā maršrutā ir četras vienības uz augšu un sešas vienības pa labi.

Piemēram, AALALALLLL.

Cik dažādos veidos var uzrakstīt šo burtu rindu?

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

četru "A" vietu izvēle

Varbūtību teorijas elementi.

Montija Holla problēma (Vikipēdijas lapa**)**

Montija Holla problēma (angļu: Monty Hall problem) ir varbūtības uzdevums, kurš radās amerikāņu televīzijas spēlē "Let's Make a Deal". Problēmas nosaukums ir cēlies no šova vadītāja Montija Holla vārda. Šo problēmu mēdz saukt arī par Montija Holla paradoksu.

Īsumā Montija Holla problēmu var izklāstīt šādi: spēlētājam tiek piedāvātas trīs durvis, bet tikai aiz vienām durvīm ir paslēpta automašīna. Spēlētājam tiek dota izvēle, kuras durvis viņš vēlas atvērt. Tātad viņam ir 33,3% varbūtība, ka aiz viņa izvēlētajām durvīm būs mašīna. Atlikušajām divām durvīm ir atlikušie 66,7%. Pēc tam spēles vadītājs atver vienas no neizvēlētajām durvīm, aiz kuras nav automašīna, un piedāvā spēlētājam vēlreiz izvēlēties. Spēlētājs var palikt pie savas izvēles vai arī mainīt to un izvēlēties otras durvis, kuras vadītājs neatvēra. Teorētiski spēlētājam vajadzētu mainīt savu izvēli, jo iepriekš izvēlētajām durvīm varbūtība bija 33,3%, bet tagad otrām durvīm vienām pašām ir tie 66,7%, kas iepriekš bija sadalītas pa divām durvīm.

Ja spēlētājs nemaina savu izvēli, tad uzvaras varbūtība nemainās. $p = \frac{1}{3}$

Ja spēlētājs maina savu izvēli, tad uzvaras varbūtība ir (skat. tabulu) $p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Mašīnas atrašanas vieta	Spēlētāja izvēle	Šova vadītāja darbība	Spēlētāja darbība	Rezultāts
A	A	B vai C	A → C vai B	zaudējums
A	B	C	B → A	uzvara
A	C	B	C → A	uzvara
B	A	C	A → B	uzvara
B	B	A vai C	B → C vai A	zaudējums
B	C	A	C → B	uzvara
C	A	B	A → C	uzvara
C	B	A	B → C	uzvara
C	C	A vai B	C → B vai A	zaudējums

Jaungada dāvanu izlozē piedālijās četri draugi. Aprēķināt varbūtību, ka neviens no viņiem neizlozēja savu dāvanu.

Cilvēks A	Cilvēks B	Cilvēks C	Cilvēks D	Der/neder
A	B	C	D	neder
A	B	D	C	neder
A	C	B	D	neder
A	C	D	B	neder
A	D	B	C	neder
A	D	C	B	neder
B	A	C	D	neder
B	A	D	C	der
B	C	A	D	neder
B	C	D	A	der
B	D	A	C	der
B	D	C	A	neder

Cilvēks A	Cilvēks B	Cilvēks C	Cilvēks D	Der/neder
C	A	B	D	neder
C	A	D	B	der
C	B	A	D	neder
C	B	D	A	neder
C	D	A	B	der
C	D	B	A	der
D	A	B	C	der
D	A	C	B	neder
D	B	A	C	neder
D	B	C	A	neder
D	C	A	B	der
D	C	B	A	der

$$p = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Uz četru metamo kauliņu sešām skaldnēm ir atveidoti sekojošie cipari:

1. metamais kauliņš: 0; 0; 4; 4; 4; 4
2. metamais kauliņš: 3; 3; 3; 3; 3; 3
3. metamais kauliņš: 2; 2; 2; 2; 7; 7
4. metamais kauliņš: 1; 1; 1; 5; 5; 5

Divi spēlētāji pēc kārtas izvēlas vienu metamo kauliņu. Uzvar spēlētājs, kuram uzkritis lielākais cipars. Kuram no spēlētājiem ir lielāka uzvaras varbūtība?

$p(\text{I m.k. uzvar II m.k.}) = p(\text{I}-4;\ \text{II}-3) =$

$= \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{2}{3}$

$p(\text{II m.k. uzvar III m.k.}) = p(\text{II}-3;\ \text{III}-2) =$

$= \frac{6}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$p(\text{III m.k. uzvar IV m.k.}) = p(\text{III}-2;\ \text{IV}-1) +$

$+ p(\text{III}-7;\ \text{IV}-1 \text{ vai } 5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$p(\text{IV m.k. uzvar I m.k.}) = p(\text{IV}-1;\ \text{I}-0) +$

$+ p(\text{IV}-5;\ \text{I}-0 \text{ vai } 4) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{6} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Tātad 2. spēlētājam ir lielāka uzvaras varbūtība (skat. zīmējumu/tabulu)

1. metamais kauliņš: 0; 0; 4; 4; 4; 4
2. metamais kauliņš: 3; 3; 3; 3; 3; 3
3. metamais kauliņš: 2; 2; 2; 2; 7; 7
4. metamais kauliņš: 1; 1; 1; 5; 5; 5

1. sp. izvēle	2. sp. izvēle
1. met. kaul.	4. met. kaul.
2. met. kaul.	1. met. kaul.
3. met. kaul.	2. met. kaul.
4. met. kaul.	3. met. kaul.

Tiek mesti viens metamais spēļu kauliņš ar sešām skaldnēm, viens metamais spēļu kauliņš ar astoņām skaldnēm un viens metamais spēļu kauliņš ar desmit skaldnēm.

Izveidot iznākumu kopu!
Aprēķināt katra iznākumu kopas elementa uzkrišanas varbūtību!

Metot trīs spēļu kauliņus, tiek saskaitīti uzmestie skaitļi. Kāda varbūtība, ka uzmesto skaitļu summa ir 10?

$$p(\text{summa ir } 10) = \frac{m}{n}$$

$$n = \boxed{10} \cdot \boxed{8} \cdot \boxed{6} = 480$$

metamais spēļu kauliņš ar desmit skaldnēm

metamais spēļu kauliņš ar astoņām skaldnēm

metamais spēļu kauliņš ar sešām skaldnēm

metamais spēļu kauliņš ar desmit skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar astoņām skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar sešām skaldnēm
8	1	1
7	2	1
7	1	2
6	3	1
6	1	3
6	2	2
5	4	1
5	1	4
5	3	2
5	2	3
4	5	1
4	1	5
4	4	2
4	2	4
4	3	3

metamais spēļu kauliņš ar desmit skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar astoņām skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar sešām skaldnēm
3	6	1
3	1	6
3	5	2
3	2	5
3	4	3
3	3	4
2	7	1
2	6	2
2	2	6
2	5	3
2	3	5
2	4	4
1	8	1
1	7	2
1	6	3

metamais spēļu kauliņš ar desmit skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar astoņām skaldnēm	metamais spēļu kauliņš ar sešām skaldnēm
1	3	6
1	5	4
1	4	5

$$p(summa\ ir\ 10) = \frac{33}{480} = \frac{11}{160}$$